Министерство образования, науки и молодежной политики Краснодарского края
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Краснодарского края
«АРМАВИРСКИЙ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ»

Курс лекций по теме:

«Предикаты. Логические операции над предикатами. Кванторные операции над предикатами».

по дисциплине «Элементы математической логики»
для студентов 2 курса

специальности *09.02.02 «Компьютерные сети»*

2016

Содержание:

Введение: 3
Предикаты 5
Понятие предиката. 5
Область определения и область значения предиката. 6
Логические операции над предикатами 8
Кванторные операции над предикатами 11
Квантор общности ∀ 11
Квантор существования ∃ 13
Применение кванторов к естественному языку: 15
Операции над кванторами. 15
Контрольные вопросы: 16
Приложение 1. 17
Литература: 20

Введение

Логика есть наука о законах и формах познающего мышления. Логика изучает мышление, но не всякое мышление, а лишь те мыслительные процессы, которые направлены на обнаружение и обоснование истины, на решение некоторой задачи, на поиск путей преодоления тех или иных трудностей, встающих перед нами как в профессиональной деятельности, так и в обыденной жизни. *Логику интересует лишь форма наших мыслей, но не их содержание. Разнообразие содержание укладывается в сравнительно небольшое число форм. Грубо говоря, логику интересуют сосуды - бутылки, ведра, бочки, - а не то, что в них налито.*

В этом отношении логика сходна с грамматикой, которую мы изучали в школе. Грамматика тоже исследует и описывает формы языковых выражений, отвлекаясь от их содержания. Известное стихотворение "Бармаглот" из "Алисы в Зазеркалье" Льюиса Кэрролла начинается со следующих строк:

"Варкалось. Хливкие шорьки
Пырялись по наве.
И хрюкотали зелюки,
Как мюмзики в мове."

Знание грамматики позволяет нам обнаружить, что в этих строчках является подлежащим, сказуемым и т. д. Мы можем говорить о роде, числе, падеже наших существительных, не имея ни малейшего представления о том, что обозначают соответствующие слова. Более того, как говорит Алиса об этих строках: они "наводят на всякие мысли, хоть и неясно - на какие". Аналогичное знание о формах мысли дает нам логика.

При изучении логики мы вводим различные формальные языки. Дело в том, что формальные языки всегда проще, чем структура естественных языков. Иногда естественный язык может быть очень сложен.

У имени существительного "предикат" есть несколько значений.

1.Первое и основное относится к логике. Под предикатом подразумевают всё, сказанное об объекте. Объект может "гулять", "быть красным", "не гулять" - все эти характеристики объекта и являются предикатами.

2.В программировании предикат - это определённая функция, с помощью которой некие элементы являются либо "истинными", либо "ложными". Зачем программисту предикаты? Все знают, что в программах бывают ошибки (bugs). Существуют специальные теории, посвященные тому, как лучше их находить и исправлять (debugging дословно означает "выведение клопов"). Зачастую нахождение ошибки — очень нетривиальная задача, так как ее последствия могут сказываться совершенно в другом месте программы и быть весьма неожиданными. При этом часто забывается тот очевидный факт, что ошибку гораздо легче предотвратить при написании программы, нежели найти и исправить потом. Существуют методы проектирования программ (*по* крайней мере, небольших), позволяющие не только написать *правильную программу*, но и получить одновременно с этим совершенно строгое *доказательство* ее правильности. Однако для того,

чтобы изучить какую-либо теорию, необходимо выучить язык, на котором теория может быть изложена. *Язык предикатов* — это именно тот язык, на котором можно строго сформулировать постановку задачи и доказать правильность конкретной программы.

3.В лингвистике предикат (предикатив) - это особый вид сказуемого (если говорить о современном русском языке). Эти сказуемые выражают, скорее, не действия, а состояния: "Ты мне не рад?". Видите, подлежащее "ты", в общем-то, ничего не делает. Просто он(о), возможно, не рад. Для особо старательных студентов я рекомендую прочитать статьи по этому разделу. Узнаете очень много нового!

Предикаты

Понятие предиката.

В математике часто рассматриваются предложения, зависящие от одной или нескольких переменных. Например, предложение А: «|x|=x» - не является высказыванием, так как о его истинности ничего нельзя сказать без знания конкретного значения x; для $x \geq 0$ это выражение истинно, для $x < 0$ ложно.

Определение 1: Предложение, содержащее переменные, которые при замене их на возможные значения становятся высказываниями, называются ***предикатом*** или ***высказывательной формой***.

Определение 2: ***Предикат*** - логическая функция от некоторого числа предметных элементов, которая определяет свойства объекта или отношения между объектами.

Определение: Предикат, зависящий от одной переменной, называют ***одноместным***. Предикат, зависящий от n переменных, называют ***n-местным предикатом***.

Таким образом, бывают двухместные, трехместные и т.д. предикаты. Любое *высказывание* является *нуль-местным* предикатом.

Пример 1.

Предложение А(x): «|x|=x» является предикатом одной переменной (одноместным).

Пример 2.

Предложение "Река *x* впадает в озеро Байкал" является одноместным предикатом, определенным над множеством всех названий рек. Подставив вместо предметной переменной *x* название "Баргузин", получим высказывание "Река Баргузин впадает в озеро Байкал". Это высказывание истинно. Подставив вместо предметной переменной *x* название "Днепр", получим ложное высказывание "Река Днепр впадает в озеро Байкал".

Пример 3.

Предложение (выражение) «$x^2+y^2 \leq 9$» является двухместным предикатом, заданным над множествами **R**, **R**. Множества, на которых задан двухместный предикат, совпадают (говорят, что это "двухместный предикат задан на множестве $\mathbf{R^2}$"). Пара действительных чисел 2, 2 превращает данный предикат в истинное высказывание: «$2^2+2^2 \leq 9$», а пара чисел 2, 3 — в ложное: «$2^2+3^2 \leq 9$».

Определение: Предикат, заданный на множестве $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называется:

1. ***Тождественно истинным***, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ он превращается в истинное высказывание;
2. ***Тождественно ложным***, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ он превращается в ложное высказывание;

3. ***Выполнимым* (*опровержимым*)**, если существует по крайней мере один набор предметов a_1 , a_2 , ..., a_n из множеств A_1 , A_2 , ..., A_n, при подстановке которого вместо соответствующих предметных переменных в предикат последний превращается в истинное (ложное) высказывание.

Пример 4.

Предикат «x^2-1=(x-1)(x+1)» является одноместным тождественно истинным на множестве действительных *x*, а предикат «x^4+1<0» одноместным тождественно ложным при всех действительных *x*.

*Пример 5***.**

Одноместный предикат "Город *x* расположен на берегу реки Волги", определенный на множестве названий городов. Существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, иначе, удовлетворяют этому предикату (например, Ульяновск, Саратов и т. д.). Но существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание, или, иначе, не удовлетворяют этому предикату (например, Прага, Якутск и т.д.). Данный предикат является выполнимым.

Пример 6.

Одноместный предикат "$\sin^2 x+\cos^2 x=1$", определенный на множестве действительных чисел, тождественно истинный.

Домашнее задание: *Самостоятельно докажите, почему предикат в примере 6 тождественно истинный***?**

Пример 7.

Двухместный предикат "$x^2+y^2<0$", заданный на множестве действительных чисел, является тождественно ложным предикатом, потому что любая пара действительных чисел превращает его в ложное высказывание (не удовлетворяет ему).

Область определения и область значения предиката.

Определение: Совокупность всех допустимых значений переменной *x* называется ***областью определения предиката***. Обозначается U_A

Определение: Совокупность значений *x*, обеспечивающих истинность предиката, называется ***множеством истинности предиката***. Обозначается I_A.

Пример 8.

Предикат C(x): «Движение разрешено, если горит *x* цвет светофора» - одноместный предикат, выполнимый. Множество допустимых значений U_A=«красный, желтый, зеленый», а множество истинности I_A=«зеленый»

Пример 9.

Множеством истинности двухместного предиката "Точка *x* принадлежит прямой *y*", заданного на множестве **E** всех точек плоскости и на множестве **F** всех прямых этой плоскости, является бинарное отношение принадлежности (инцидентности) между точками и прямыми плоскости.

Пример 10.

Множество истинности двухместного предиката S(x,y): «$x^2+y^2=9$», заданного на множестве $\mathbf{R^2}$, есть множество всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность с центром в начале координат и радиусом 3.

Пример 11.

Дан одноместный предикат "|a|>2". Область допустимых значений данного предиката **R,** а множество истинности $(-\infty; -2)\cup(2; \infty)$ (или **R**\[-2; 2]).

Определение: Предикаты A(x) и B(x) с одной и той же областью определения называются ***равносильными***, если они имеют одинаковые множества истинности. Их обозначают: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Пример 12.

Предикаты A(x): «|x-1|=x-1» и B(x): «$x-1=\sqrt{(x-1)^2}$» заданные на множестве действительных *x*, имеют одинаковые множества истинности $x\geq 1$, поэтому $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Пусть A(x) и B(x) – предикаты с некоторой частью области определения переменной *x*.

Определение: Предикат B(x) называют ***следствием*** предиката A(x), если множество истинности предиката A(x) является частью множества истинности предиката B(x).

Например, из равенства $x=0$ следует, что $\sin x=0$, но не наоборот. Пояснение:
Здесь даны два предиката: A(x): «x=0» и B(x): «$\sin x=0$», определенные на множестве действительных чисел. Множеством истинности предиката A(x): «x=0» является единственное значение $x=0$ среди всех действительных чисел, но множество истинности предиката B(x): «$\sin x=0$», имеющего ту же область определения, содержит бесконечно много значений *x*, задаваемых формулой $x=\pi k$ ($k=0; \pm1; \pm2\ldots$), среди которых есть и $x=0$. Это означает, что предикат B(x) есть следствие предиката A(x).

Определение: Предикаты A(x) и B(x) одной и той же областью определения ***равносильны тогда и только тогда***, когда B(x) есть следствие предиката A(x), и A(x) есть следствие предиката B(x).

Двухместный предикат – это более сложная структура, чем одноместный предикат. Двухместные предикаты также называют бинарными

отношениями. Например, неравенство «$x \cdot \sin y \geq x^2 - y^2$» можно рассматривать как двухместный предикат A(x,y), принимающий значение «истинно» для тех пар значений *x* и *y*, для которых оно верно, и «ложно» при *x* и *y*, для которых оно неверно.
Над предикатами возможны те же логические операции, что и над высказываниями: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

Логические операции над предикатами

Предикаты, так же, как и высказывания, принимают два значения «истина» и «ложь» (1 и 0), поэтому к ним применимы все операции алгебры логики.

Пусть на некотором множестве *M* определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. ***Конъюнкцией*** двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат $\mathbf{P(x) \wedge Q(x)}$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in \mathbf{M}$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях. Областью истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является пересечение областей истинности обоих предикатов, то есть $I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q$.

Пример 13.
$P(x)$ – «*x* – четное число», $Q(x)$ – «*x* кратно 3». Предикат $P(x) \wedge Q(x)$: «*x* – четное число и *x* кратно 3» = «*x* делится на 6».

Определение. ***Дизъюнкцией*** двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат $\mathbf{P(x) \vee Q(x)}$ который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.
Областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение областей истинности обоих предикатов, то есть $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$.

Определение. ***Отрицанием*** предиката $P(x)$ называется предикат $\boldsymbol{\overline{P(x)}}$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in \mathbf{M}$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in \mathbf{M}$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина».
Областью истинности предиката $\overline{P(x)}$ является дополнение множества истинности предиката $P(x)$ до множества **M**, то есть $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$.

Определение. ***Импликацией*** предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат $\mathbf{P(x) \rightarrow Q(x)}$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in \mathbf{M}$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях. Так как при каждом фиксированном *x* справедлива

равносильность $P(x)\to Q(x)\equiv \overline{P(x)}\vee Q(x)$, то область истинности предиката $P(x)\to Q(x)$, является объединением дополнения области истинности предиката $P(x)$ до множества **M** и области истинности предиката $Q(x)$, то есть $I_{P\to Q}=I_{\bar{P}} \cup I_Q$.

Определение. ***Эквиваленцией*** предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат **P(x)↔Q(x),** который превращается в истинное высказывание при всех x∈**M**, при которых одновременно $P(x)$ и $Q(x)$ принимают одинаковые значения истинности. Так как при каждом фиксированном x справедлива равносильность $P(x)\leftrightarrow Q(x)\equiv (\bar{P}\vee Q)\wedge(P\vee\bar{Q})$ то область истинности предиката $P(x)\leftrightarrow Q(x)$, является коньюнкцией объединений дополнения области истинности предиката $P(x)$ до множества **M** и области истинности предиката $Q(x)$, и дополнения области истинности предиката $Q(x)$ до множества **M** и области истинности предиката $P(x)$ то есть $I_{P\leftrightarrow Q}=(I_{\bar{P}} \cup I_Q)\cap (I_{\bar{Q}} \cup I_P)$

Пример 14.

Даны два предиката

P: «5x-6<3x»;

Q: «2<x≤8»

Найти множества истинности предикатов: $\overline{P(x)}$, $\overline{Q(x)}$, $P(x)\wedge Q(x)$, $P(x)\vee Q(x)$, $P(x)\to Q(x)$, $P(x)\leftrightarrow Q(x)$.

Решение:

Нужно найти

а) $I_{\bar{P}}$

б) $I_{\bar{Q}}$

в) $I_{P\vee Q}$

г) $I_{P\wedge Q}$

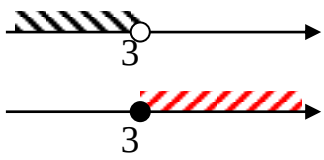
д) $I_{P\to Q}$

е) $I_{P\Leftrightarrow Q}$

P: «5x-6<3x»; $U_P=(-\infty;\infty)$ $I_P=(-\infty;3)$

Q: «2<x≤8» $U_Q=(-\infty;\infty)$ $I_Q=(2;8]$

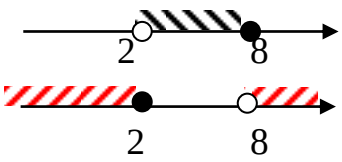
а)



I_P

$I_{\bar{P}}=[3;\infty)$

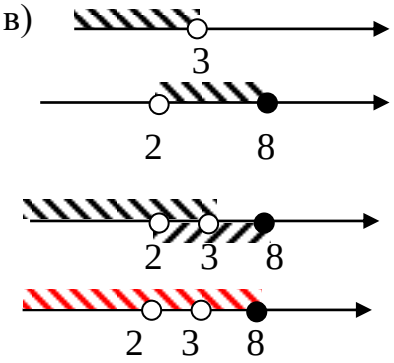
б)



I_Q

$I_{\bar{Q}}=(-\infty;2]\cup(8;\infty)$

в)

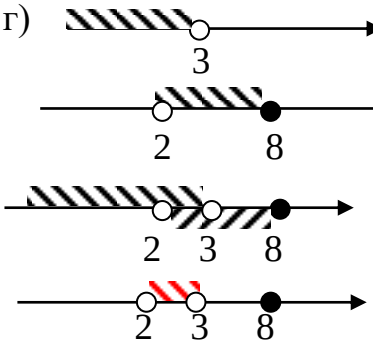


I_P

I_Q

$I_{P \vee Q} = (-\infty; 8]$

г)

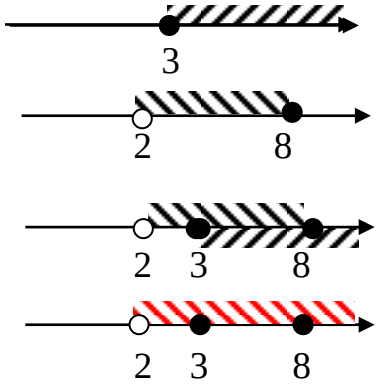


I_P

I_Q

$I_{P \wedge Q} = (2; 3)$

д) $P \rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$

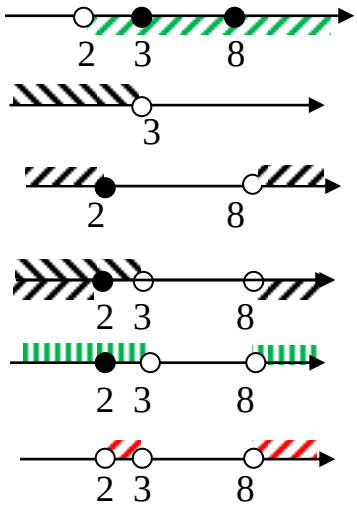


$I_{\overline{P}}$

I_Q

$I_{P \rightarrow Q} = (2; \infty)$

е) $P \Leftrightarrow Q = (\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q})$



$I_{\overline{P} \vee Q}$ (из предыдущего примера)

I_P

$I_{\overline{Q}}$

$I_{P \vee \overline{Q}}$

$I_{P \Leftrightarrow Q} = (2; 3) \cup (8; \infty)$

Домашнее задание:

1. идентифицировать предикат (определить, является ли данное предложение предикатом или нет):
   a) «Все кошки хорошо видят в темноте»
   b) «x-9<16»
   c) «y=3x-6»
2. Определите множество истинности для каждого предиката.

Кванторные операции над предикатами

Специфика природы предикатов позволяет ввести такие операции над ними, которые не имеют аналогов среди операций над высказываниями. Имеются в виду две кванторные операции над предикатами (или операции квантификации) — квантор общности ∀ и квантор существования ∃.

Кванторы в явном виде впервые были введены немецким математиком Готлобом Фреге в работе "Begriffsschrift" ("Исчисление понятий", 1879). В 1885 г. английский логик Чарльз Пирс ввел термины "квантор", "квантификация", происшедшие соответственно от лат. quantun — "сколько" и лат. *quantun* + *facio* — "делать". Это означает, что квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином предложении. Символику для кванторов в виде перевернутых латинских букв ввел итальянский математик Дж. Пеано в 90-е гг. XIX в. После использования кванторов математиками Пеано, Шредером, Расселом они стали широко использоваться.

Кванторами называются символы ∀ и ∃, являющиеся сокращением:

∀ – «для любого», «для каждого», «для всех»;

∃ – «существует», «найдётся».

Помимо кванторов и вместе с ними часто используются символы «!», «:», «|», являющиеся сокращением:

! – «единственный»;

: – «такой, что»;

| – «такой, что».

При этом «:» используется, как правило, в формулировках определений и теорем, записываемых при помощи кванторов, например, в определении предела последовательности. В то же время, знак «|» применятся в определениях множеств.

Квантор общности ∀

Известно, что для превращения одноместного предиката в высказывание нужно подставить вместо его переменной какой-нибудь конкретный предмет из области задания предиката. Имеется еще один способ для такого превращения — это применение к предикату операций

связывания квантором общности или квантором существования. Каждая из этих операций ставит в соответствие одноместному предикату некоторое высказывание, истинное или ложное в зависимости от исходного предиката.

Определение: Операцией ***связывания квантором общности*** называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве **M**, сопоставляется высказывание, обозначаемое (∀x)(P(x)) (читается: "для всякого [значения] x - P(x) [истинное высказывание]"), которое истинно в том и только в том случае, когда предикат P(x), тождественно истинен, и ложно в противном случае.

Пример 15.
Рассмотрим два одноместных предиката на множестве **N**: «$0 \le x$» (x больше или равен нуля) и «$x|30$» (x – делитель 30). Первый предикат тождественно истинный, поэтому применение к нему операции связывания квантором общности дает истинное высказывание: $(\forall x)(0 \le x)$ — "для всякого x число 0 не превосходит x". Второй предикат опровержим, поэтому операция связывания квантором общности, примененная к нему, дает ложное высказывание: $(\forall x)(x|30)$ — "для любого x число x является делителем числа 30".

Если одноместный предикат P(x), задан на конечном множестве $\mathbf{M}=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$, то высказывание (∀x)(P(x)) эквивалентно (имеет то же логическое значение) конъюнкции $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n)$. В самом деле, по определению истинность высказывания (∀x)(P(x)) означает, что предикат тождественно истинен, т.е. каждое из высказываний $P(a_1)$, $P(a_2)$, …, $P(a_n)$, в которые этот предикат превращается, истинно. Последнее равносильно истинности конъюнкции $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n)$.

Следовательно, для предикатов, заданных на конечном множестве, операция связывания квантором общности может быть выражена через конъюнкцию. Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором общности является существенно новой.

Можно подметить еще одну особенность операции связывания квантором общности по сравнению с ранее описанными операциями: они ставили в соответствие одному или двум предикатам новый предикат, а операция связывания квантором общности сопоставляет предикату высказывание. На это можно сказать следующее. Во-первых, каждое высказывание для достижения большей общности сейчас и в дальнейшем можно рассматривать как предикат, содержащий 0 предметных переменных, т. е. как нульместный предикат. Во-вторых, мы пока применяли квантор общности лишь к одноместным предикатам. Переходим к рассмотрению вопроса о применении операции связывания квантором общности к предикатам с любым числом предметных переменных; такая операция

предстанет операцией в полном смысле слова: предикатам она будет сопоставлять предикаты.

Определение: Операцией ***связывания квантором общности*** по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, …, $\mathbf{M}_n$, ставится в соответствие новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый $(\forall x)(P(x, x_2, \ldots, x_n))$, (читается: "для всех x_1 $P(x, x_2, \ldots, x_n)$, который для любых предметов $a_2 \in \mathbf{M}_2$, …, $a_n \in \mathbf{M}_n$ превращается в высказывание $(\forall x_1)(P(x, a_2, \ldots, a_n))$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве $\mathbf{M}_1$ тождественно истинный, и ложное в противном случае.

Пример 16.
Например, рассмотрим двухместный предикат *"$y \leq x$"*, определенный на множестве $\mathbf{N}^2$. Применим к нему квантор общности по переменной *x*. Получим одноместный предикат $(\forall x)(y \leq x)$, зависящий от переменной *y*. Этот предикат может превратиться как в истинное высказывание (при $y=1$), так и в ложное (при подстановке вместо y любых натуральных чисел, кроме 1).

Пример 17.
Двухместный предикат *"$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$"*, определенный на $\mathbf{R}^2$, тождественно истинен. Поэтому применение к нему квантора общности по любой переменной, например по *y*, дает одноместный предикат (по *x*), который будет тождественно истинным $(\forall x)((x+y)^2=x^2+2xy+y^2)$

Квантор существования ∃

Определение: Операцией ***связывания квантором существования*** называется правило, по которому каждому одноместному предикату P(x), определенному на множестве **M**, ставится в соответствие высказывание, обозначаемое (∃x)(P(x)) (читается: "существует [значение] x, такое, что P(x), [истинное высказывание]"), которое ложно в том и только в том случае, когда P(x), тождественно ложен, и истинно в противном случае.

Пример 18.
рассмотрим два одноместных предиката, определенных на множестве **N**: «$x=x+1$» и «$x|30$». Первый предикат тождественно ложный, поэтому применение к нему операции связывания квантором существования дает ложное высказывание: $(\exists x)(x=x+1)$ - "существует натуральное число, равное себе плюс 1". Второй предикат выполним, поэтому операция связывания квантором существования, примененная к нему, дает истинное высказывание: $(\exists x)(x|30)$ - "существует натуральное число, делящее число 30".

Если одноместный предикат P(x), задан на конечном множестве $\mathbf{M}=\{a_1,a_2,\ldots a_m\}$, , то высказывание $(\exists x)(P(x))$ эквивалентно (имеет то же логическое значение) дизъюнкции $P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_m)$. В самом деле, по определению ложность высказывания $(\exists x)(P(x))$ означает, что предикат P(x), тождественно ложен, т.е. каждое из высказываний $P(a_1)$, $P(a_2)$, …,$P(a_m)$, в которые данный предикат может превратиться, ложно. Последнее равносильно ложности дизъюнкции $P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_m)$.

Значит, для предикатов, заданных на конечном множестве, операция связывания квантором существования может быть выражена через дизъюнкцию. Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором существования является существенно новой.

Определение: Операцией ***связывания квантором существования*** по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n\geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, …, $\mathbf{M}_n$, ставится в соответствие новый (n-1)-местный предикат, обозначаемый $(\exists x)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (читается: "существует такой x_1 что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который для любых предметов $a_2\in\mathbf{M}_2$, …, $a_n\in\mathbf{M}_n$ превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, определенный на множестве $\mathbf{M}_1$,тождественно ложен, и истинное в противном случае.

Пример 19.

Например, рассмотрим двухместный предикат "$y\leq x$", определенный на R^2. Применим к нему квантор существования по переменной x. Получим одноместный предикат $(\exists x)(y\leq x)$, зависящий от переменной y. Этот предикат всегда превращается в истинное высказывание, если вместо y подставлять конкретные числа, т.е. он является тождественно истинным предикатом.

Пример 20.

В другом примере двухместный предикат "$x^2+y^2<0$", определенный на $\mathbf{R}^2$, тождественно ложен. Поэтому применение к нему квантора существования по любой переменной, например по x, дает одноместный (по y) предикат, который будет тождественно ложным: $(\exists x)(x^2+y^2<0)$.

Кванторы ∃ и ∀ могут использоваться и для любого числа переменных.

Рассмотрим их различное использование на примере двухместного предиката любит (X, У), который описывает отношение: «X любит Y»):

(∀X) (∀Y) любит (X, Y) – «все люди любят всех людей»

(∃X) (∀Y) любит (X, Y) – «существует человек, который любит всех

(∀X) (∃Y) любит (X, Y) – «для каждого человека существует тот, который его любит»

(∃X) (∃Y) любит (X, Y) – «существует человек, который кого-нибудь любит».

Применение кванторов к естественному языку:

∀x A(x)	Для любого x (имеет место) A(x) A(x) при произвольном x Для всех x (верно) A(x) A(x), каково бы ни было x Для каждого x (верно) A(x) Всегда имеет место A(x) Каждый обладает свойством A Свойство A присуще всем Всё удовлетворяет A Любой объект является A Всякая вещь обладает свойством A	∀x¬ A(x)	Для всякого x неверно A(x) A(x) всегда ложно ничто не обладает свойством A всё суть не A
∃x A(x)	Для некоторых x (имеет место) A(x) Для подходящего x (верно) A(x) Существует x, для которого (такой, что) A(x) Имеется x, для которого (такой, что) A(x) Найдется x, для которого (такой, что) A(x) У некоторых вещей есть признак A Хотя бы для одного x (верно) A(x) Кто-нибудь относится к (есть) A По крайней мере, один объект есть A	¬∃x A(x)	Не существует x такого, что A(x) Нет никакого x, такого, что A(x) Нет x, такого, что A(x) A(x) не выполняется ни для какого x Ничто не обладает свойством A Никто не есть A Неверно, что для некоторых x A(x) Ни для какого x не верно A(x)
¬∀x A(x)	Не для каждого x (имеет место) A(x) Не при всяком x (верно) A(x) A(x) оказывается истинным не для всех x Не всё обладает свойством A Не все суть A A не всегда верно	∃x ¬A(x)	Для некоторого x неверно A(x) Что-то не обладает свойством A Кто-то есть не A

Операции над кванторами.

Для построения отрицания высказываний, которые содержат кванторы, применяется правило отрицания кванторов:

$$\overline{(\forall x)P(x)} = (\exists x)\overline{P(x)}$$
$$\overline{(\exists x)P(x)} = (\forall x)\overline{P(x)}$$

Пример 21

Рассмотрим на множестве X = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …,9} предикат A(x): «x – натуральное число». Его отрицанием является предикат $\overline{A(x)}$, областью определения которого является то же множество X и который истинен для тех и только тех x из множества X, для которых предикат A(x) ложен. Отрицанием данного предиката является предикат$\overline{A(x)}$: «x– не натуральное число». Множество истинности его состоит из чисел составляющих дополнение к множеству истинности предиката A(x) в множестве X.

$I_A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 9\}$

$I_{\overline{A}} = \{-2, -1, 0\}$

Пример 22.

На множестве X = {-2, -1, 0, 1, 2, … , 10} заданы предикаты A(x): «$2x$ - 1 < 3» и B(x): «x + $2x$ = 0».

Получить предикат $A(x) \wedge \overline{B(x)}$

Решение:

Образуем предикат вида $A(x) \wedge \overline{B(x)}$. В нашем примере его словесное выражение таково: «$2x$- 1 < 3 и неверно, что x + $2x$ = 0».

Найдем множество истинности этого составного предиката. Для этого:

1. Находим множество истинности предикатов A(x) и B(x). Имеем соответственно, что $\mathbf{I}_A$ = {-2, -1, 0, 1},а $\mathbf{I}_B$ = {0}.
2. Находим множество истинности предиката $\overline{B(x)}$, который является отрицанием предиката B(x) и, следовательно, его множество истинности является дополнением к множеству {0} в множестве X.

Таким образом, $I_{\overline{B}}$ ={-2, -1, 1, 2, 3, …, 10}.

3. Находим множество истинности конъюнкции предикатов A(x) и$\overline{B(x)}$, являющееся пересечением $\mathbf{I}_A$ и $I_{\overline{B}}$.

Имеем, что $I_{A\wedge\overline{B}}$=$\mathbf{I}_A \cap I_{\overline{B}}$ = {-2. -1, 0, 1} ∩ {-2, -1, 1, 2, 3, …, 10} = {-2, -1, 1}.

Домашнее задание:

Придумайте самостоятельно предикаты P(x), Q(x), A(x), B(x), C(x). Используя операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции предикатов, и операции над кванторами, постройте составные предикаты:

1. $\forall x\overline{(P(x) \vee Q(x))}$
2. $\overline{\exists x(P(x) \wedge Q(x))}$
3. $\exists x\overline{(P(x) \to Q(x))}$
4. $A(x) \vee C(x) \wedge \overline{B(x)}$
5. $\overline{A(x) \wedge B(x) \vee C(x)}$

Контрольные вопросы:

1) Что называется предикатом?
2) Что называется множеством истинности предиката?
3) Приведите пример одноместного предиката, двухместного предиката.
4) Какой предикат называется тождественно истинным? Приведите пример.
5) Какой предикат называется тождественно ложным? Приведите пример.
6) Какой предикат называется выполнимым? Приведите пример.
7) Что называется областью определения предиката?
8) Что называется множеством истинности предиката?
9) Какие предикаты называются равносильными?
10) Какие логические операции определены над предикатом?
11) Что называется квантором? Какие вы знаете кванторы?
12) Как кванторы применяются к предикатам?

Приложение 1.

Задания к практической работе по теме «Предикаты. Выполнение операций над предикатами.»

Вариант № 1.

Задание 1**.** Идентифицируйте следующие предложения:

1) «$x^2 - 4 = 0$»;
2) «n: 4»;
3) «$2 \cdot 2 = 4$»
4) $\forall x\ (x^2 + x + 1 < 0)$;
5) $\exists x\ (x + 5 = 2x - 3)$

Для предикатов найдите область определения и множество истинности.

Задание 2 Найдите u_P, u_Q, I_P, I_Q.

P(x) = «$x^2+4x+3<0$»

Q(x)= «$\cos x \geq \frac{1}{2}$»

Задание 3. Дано I_P, I_Q. Найти $I_{\bar{P}}$, $I_{\bar{Q}}$, $I_{P \vee Q}$, $I_{P \wedge Q}$, $I_{P \to Q}$, $I_{P \leftrightarrow Q}$

I_Q=(0; 6)

I_P=(-8; ∞)

Задание 4. Заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4». Сформулируйте высказывания:

$$\forall x(\overline{P(x) \to Q(x)})$$
$$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

Найдите отрицания этих формул.

Вариант № 2.

Задание 1**.** Идентифицируйте следующие предложения:

1) «при x = 2 выполняется равенство $x^2 - 2 = 1$»;
1) « $x^2 - 2x + 1 = 0$»;
2) «$x^2 + y^2<0$»
3) $\exists x\ (x^2 + x - 2 \geq 0)$
4) $\forall x\ (x + 2 = 3x - 6)$.

Для предикатов найдите область определения и множество истинности.

Задание 2. Найдите u_P, u_Q, I_P, I_Q.

P(x) = «x-5>2x-3»

Q(x)= «$\frac{x-5}{x-1} > 0$»

Задание 3. Дано I_P, I_Q. Найти $I_{\bar{P}}$, $I_{\bar{Q}}$, $I_{P \vee Q}$, $I_{P \wedge Q}$, $I_{P \to Q}$, $I_{P \leftrightarrow Q}$

I_Q=(-3; 2)

I_P=(0; 10)

Задание 4. Заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4» Сформулируйте высказывания:

$$\exists x \forall y(P(x) \wedge \overline{Q(y)})$$
$$\exists x(P(x) \to Q(x))$$

Найдите отрицания этих формул.

Вариант № 3.

Задание 1**.** Идентифицируйте следующие предложения:

1) «n: 5»;

1) «$(a + b)^2 < 0$»;

2) «при y = -1, $y^2 - 1 = 0$»;

3) $\exists x\ (x^2 + 2x + 1 = 0)$;

4) $\forall x\ (x - 7 \leq 2x + 5)$.

Для предикатов найдите область определения и множество истинности.

Задание 2. Найдите U_P, U_Q, I_P, I_Q.

P(x) = «x^2-2x+4≥0»

Q(x)= «$\sin x > \frac{1}{2}$»

Задание 3. Дано I_P, I_Q. Найти $I_{\bar{P}}$, $I_{\bar{Q}}$, $I_{P \vee Q}$, $I_{P \wedge Q}$, $I_{P \to Q}$, $I_{P \leftrightarrow Q}$

I_Q=(-10; ∞)

I_P=(6; 8]

Задание 4. Заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4»

Сформулируйте высказывания:

$$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x))$$

Найдите отрицания этих формул.

Вариант № 4.

Задание 1**.** Идентифицируйте следующие предложения:

1) ««при x = 1, 3x – 2 = -1»;

2) «2x +5 ≥ 3x - 4»;

3) «x^2+ 4x +4 = 0»;

4) $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 = 0)$;

5) $\exists x\ (3x + 4 > 4x - 3)$.

Для предикатов найдите область определения и множество истинности.

Задание 2. Найдите U_P, U_Q, I_P, I_Q.

P(x) = «$x^3 < \frac{8}{x}$»

Q(x)= «x+8<4x»

Задание 3. Дано I_P, I_Q. Найти $I_{\bar{P}}$, $I_{\bar{Q}}$, $I_{P \vee Q}$, $I_{P \wedge Q}$, $I_{P \to Q}$, $I_{P \leftrightarrow Q}$

I_Q=[6; 11]

I_P=[2; ∞)

Задание 4. Заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4»

Сформулируйте высказывания:

$$\exists x \forall y(P(y) \wedge Q(x)$$

$$\forall x(P(x) \wedge \overline{Q(x)})$$

Найдите отрицания этих формул.

Вариант № 5.

Задание 1**.** Идентифицируйте следующие предложения:

1) «$|-7| = 7$»;

2) «$2x + 5 \geq 3x - 4$»;

3) «$2 \cdot (6x-1) < 20$»;

4) $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 = 0)$;

5) $\exists x\ (3x + 4 > 4x - 3)$.

Для предикатов найдите область определения и множество истинности.

Задание 2. Найдите U_P, U_Q, I_P, I_Q.

P(x) = «$4x+6 \leq 3 - 9x$»

Q(x)= «$\sqrt{x} \geq 10$»

Задание 3. Дано I_P, I_Q. Найти $I_{\bar{P}}$, $I_{\bar{Q}}$, $I_{P \vee Q}$, $I_{P \wedge Q}$, $I_{P \to Q}$, $I_{P \leftrightarrow Q}$

I_Q=[-2; 0]

I_P=[6; ∞)

Задание 4. Заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4» :

Сформулируйте высказывания:

$$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$$
$$\exists x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

Найдите отрицания этих формул.

Вариант № 6.

Задание 1**.** Идентифицируйте следующие предложения:

1) «$|-7x| > 7$»;

2) «$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$»

3) «$10 : 5$»;

4) $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 = 0)$

5) $\exists x\ (3x + 4 > 4x - 3)$.

Для предикатов найдите область определения и множество истинности.

Задание 2. Найдите U_P, U_Q, I_P, I_Q.

P(x) = «$\frac{1}{x^2} \leq 16$»

Q(x)= «$2x-3 \geq 3x$»

Задание 3. Дано I_P, I_Q. Найти $I_{\bar{P}}$, $I_{\bar{Q}}$, $I_{P \vee Q}$, $I_{P \wedge Q}$, $I_{P \to Q}$, $I_{P \leftrightarrow Q}$

I_Q=[-3; 3]

I_P=(-∞; 10)

Задание 4. Заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4»

Сформулируйте высказывания:

$$\forall x \exists y (\overline{P(x)} \to Q(y))$$
$$\exists x (\overline{P(x)} \wedge Q(x))$$

Найдите отрицания этих формул.

Литература:

1. С. Клини. Математическая логика. Перевод на русский язык «Мир», 1973
2. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике. — М.: Мысль, 1965.
3. 2. Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
4. Джесси Рассел. Предикат. – VSD, 2012
5. http://player.myshared.ru/392553
6. http://studopedia.su/14_109121_predikati-i-operatsii-nad-nimi.html
7. http://tolkslovar.ru/p17140.html

Заключение

Мыслительные процессы, которые направлены на обнаружение и обоснование истины, на решение новых классов задач, на поиск путей преодоления трудностей, встают перед нами как в профессиональной деятельности, так и в обыденной жизни.

Грамотного специалиста от «простого работяги» отличает прежде всего умение размышлять, принимать решение в нестандартных ситуациях, отвечать за свои решения. В специальности «Компьютерные сети» невозможно обойтись без использования справочной литературы. Умение работать с предикатами и предикативными формами определяет расширенный кругозор такого специалиста.

Данное пособие рассматривает способы построения множества истинности предикатов, применения к ним кванторов.

Задание 4. Пусть предикат P(x;y) определён на множестве N^2 и означает «$x < y$». Определите истинность высказываний, сформулировав каждое из них:

1) $\exists x \forall y P(x; y)$; 2) $\forall x \exists y P(x; y)$; 3) $\exists x \exists y P(x; y)$; 4) $\forall y \forall x P(x; y)$.

5) Задание 4. Пусть предикат P(x;y) определён на множестве N^2 и означает «$x \geq y$». Определите истинность высказываний, сформулировав каждое из них:

6) 1)$\exists y \forall x P(x; y)$; 2) $\forall x \exists y P(x; y)$; 3) $\exists y \exists x P(x; y)$; 4) $\forall x \forall y P(x; y)$.

На множестве натуральных чисел заданы предикаты A(n) – «$n \vdots 12$», B(n) – «$n \vdots 3$», C(n) – «$n \vdots 4$». Определите истинность высказываний, сформулировав каждое из них:

1) $\exists n$ (C(n) → A(n)); 2) $\forall n$ ($\overline{B(n)} \wedge \overline{C(n)}$); 3) $\forall n$ (B(n) ∧ C(n) →A(n)).

Задание 4. Пусть предикат P(x;y) определён на множестве N^2 и означает «$x > y$». Определите истинность высказываний, сформулировав каждое из них:

1)$\exists x \exists y P(x; y)$; 2) $\forall x \forall y P(x; y)$; 3) $\exists y \forall x P(x; y)$; 4) $\forall y \exists x P(x; y)$.

Задание 5. На множестве A = $\{4; 5; 6; \ldots; 20\}$ заданы предикаты P(x) = «x – нечётное число», Q(x) = «x делится на 4» и S(x) = «x – простое число». Найдите области истинности предикатов $\overline{P}$, P∧S, Q∨S, S → Q, S ↔ P.

На множестве натуральных чисел заданы предикаты A(n) – «$n \vdots 2$», B(n) – «$n \vdots 14$», C(n) – «$n \vdots 7$». Определите истинность высказываний, сформулировав каждое из них:

1) $\forall n$ (C(n) → $\overline{A(n)}$); 2) $\exists n$ ($\overline{B(n)}$∧ A(n)); 3) $\exists n$ (B(n) → A(n) ∧C(n)).

Задание 4. Пусть предикат P(x;y) определён на множестве N^2 и означает «$x \leq y$». Определите истинность высказываний, сформулировав каждое из них:

1)$\forall x \forall y P(x; y)$; 2) $\forall y \exists x P(x; y)$; 3) $\exists x \forall y P(x; y)$; 4) $\forall x \exists y P(x; y)$.

Задание 5. На множестве A = $\{5; 6; 7; \ldots; 21\}$ заданы предикаты P(x) = «x – чётное число», Q(x) = «x делится на 6» и S(x) = «x – составное число». Найдите области истинности предикатов $\overline{S}$, S∧Q, Q∨S, S → P, Q ↔ P.

http://player.myshared.ru/392553/ - сделать копию презентации