ГБОУ СПО «АМТ» КК

Учебное пособие

Основы теории вероятностей

Раздел 1. Случайные события

для студентов специальности
«Программирование в компьютерных системах»

Автор: Беляева Татьяна Юрьевна

2014

Содержание

1. Случайные события. Операции над событиями

1.1. Предмет теории вероятностей. Понятие события. Виды событий

Опр. ***ТВ*** – это раздел математики, в котором изучаются закономерности случайных событий.

Понятие события является основным, неопределяемым. Его можно охарактеризовать как некоторое явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определённого комплекса условий (опыта, испытания).

Напр.: *«брошена монета» - испытание*

$$\left.\begin{array}{l}\text{"появленние герба"}\\ \text{"появление решки"}\end{array}\right\} - \text{события}$$

Опр. Событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания, называется ***случайным***.

Обозначение: $A, B, C, \ldots$ (*заглавные буквы латинского алфавита, возможно с индексами)*

Напр.: *1) Бросается игральная кость*

Событие $A_к$ – «на грани выпало к очков»

2) Производится выстрел по мишени

$B_к$ – «выбито к очков»

Опр. Событие, которое обязательно произойдёт в результате данного испытания, называется ***достоверным***.

Обозначение: U

Напр.: *1) извлечение белого шара из урны, в которой находятся все белые шары;*

2) выпадение менее семи очков при бросании игрального кубика.

Опр. Событие, которое никогда не произойдёт в результате данного испытания, называется ***невозможным***.

Обозначение: V

Напр.: *1) выпадение цифры 5 при бросании 10-копеечной монеты;*

2) извлечение черного шара из урны с белыми шарами.

1.2. Виды случайных событий

<u>Опр.</u> События A и B называются ***несовместными,*** если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются ***совместными***.

Напр.: *1) «появилась решка» и «появился герб» - несовместные события*

2) «выпало 2 очка» и «выпало чётное число очков» - совместные события

<u>Опр.</u> События A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечёт появление другого.

Напр.: *«появилась решка» и «появился герб» - противоположные события*

(!!) *Очевидно, что A и $\overline{A}$ несовместны и являются единственными исходами данного испытания.*

<u>Опр.</u> События называются ***равновозможными***, если ни одно из них не имеет никаких преимуществ в своём появлении перед другими.

Напр.: *«выпало 5 очков» и «выпало 3 очка» - равновозможные*

Различают события ***элементарные*** и ***составные*** (которые разлагаются на элементарные).

<u>Опр.</u> События A называется ***благоприятствующим*** событию B, если появление события A в результате данного испытания влечёт за собой появление события B.

<u>ПР.</u> Испытание – «производится выстрел по мишени»

События:

1) $A_к$ – «выбито *к* очков» (к = 0, 1, 2,…,10)
2) B – «выбито чётное число очков»
3) C – «выбито нечётное число очков»
4) D – «выбито более 4-х очков»
5) E – «выбито менее 5-и очков»
6) F – «число выбитых очков делится на 11»
7) Q – «число выбитых очков меньше 12»

Достоверное событие – Q

Невозможное событие – F

Элементарные: все $A_к$

Составные: B, E

Попарно несовместны: A_3 и A_8, B и C, A_6 и E

Совместные: A_8 и B, A_3 и C, A_2 и E

Противоположные: B и C, D и E

Равновозможные события: A_2 и A_4

События, не являющиеся равновозможными: A_3 и C

События A_1, A_2, A_3 и A_4 благоприятствуют событию E

События A_1, A_3, A_5, A_7 и A_9 благоприятствуют событию C

Опр. Если совокупность событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти одно из них, и любые два из них несовместны, то она называется ***полной группой событий***.

Так, полными группами событий в нашем примере являются:

1) $A_0, A_1, \ldots, A_{10}$;
2) *B и C;*
3) *D и E.*

1.3. Операции над событиями

Опр. ***Суммой нескольких событий*** называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Обозначение: A + B, $\sum_{i=1}^{n} A_i$

Напр.: *Бросается игральная кость.*

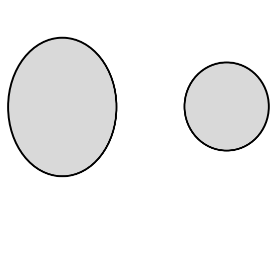
A *– «выпала 1»*

B *– «выпала 2»*

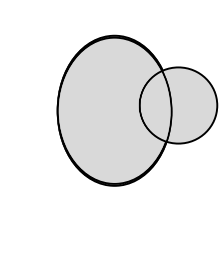
A* + *B *– «выпало не более 2-х очков»*

(!!) *Сумма событий интерпретируется как объединение множеств:*

Несовместные события



Совместные события



<u>Опр.</u> ***Произведением нескольких событий*** называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Обозначение: A · B, $\prod_{i=1}^{n} A_i$

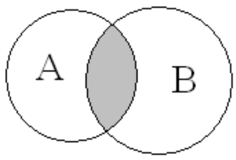
Напр.*:* *Из колоды карт достают карту.*

A *– «вынута дама»*

B *– «вынута карта пиковой масти»*

A · B *– «вынута дама пик»*

(!!) *Произведению событий соответствует следующая диаграмма Венна:*



(!!) *Очевидно,* $A + \overline{A} = U, \quad A \cdot \overline{A} = V$

Используя операции сложения и умножения, можно сложное событие разложить на более простые и наоборот.

2. Определения вероятности события

2.1. Классическое и статистическое определения вероятности

Пусть A – случайное событие, связанное с некоторым опытом. Повторим опыт *n* раз в одних и тех же условиях. Пусть при этом событие A повторилось *m* раз.

<u>Опр.</u> Отношение числа *m* опытов, в которых событие A появилось, к общему числу *n* произведённых опытов называется ***относительной частотой события A***.

Обозначение: w(A)

Таким образом: $\boxed{\mathrm{w}(A) = \frac{m}{n}}$

Напр.:

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Частота
Бюффон (18 век, фр.)	4040	2048	0,507
Пирсон (начало 20 века, англ.)	12000	6014	0,5012
Пирсон	24000	12012	0,5005

Опр. (статистическое определение вероятности) Постоянная величина, к которой всё более приближается частота события А при достаточно большом повторении опыта, называется ***вероятностью события А***.

Обозначение: P(A), p

Опр. (классическое определение вероятности) ***Вероятностью события А*** называется отношение числа M элементарных исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к числу N всех элементарных исходов испытания.

Таким образом: $\boxed{P(A) = \frac{M}{N}}$

При этом предполагается, что элементарные исходы образуют полную группу, несовместны и равновозможны.

(!!) *Если статистическая вероятность определяется путём испытаний, то классическая вероятность находится без каких-либо опытов. Последние заменяются логическими рассуждениями.*

Из классического определения вероятности вытекают следующие ***свойства вероятности***:

1. $0 \le P(A) \le 1$, т.к. $0 \le M \le N$
2. P(U) = 1, т.к. $P(U) = \frac{N}{N} = 1$
3. P(V) = 0, т.к. $P(V) = \frac{0}{N} = 0$

Задача. Брошена игральная кость. Найти вероятность следующих событий: А – «выпало 3 очка», В – «выпало чётное число очков»

/ для А: N = 6, M = 1 => P(A) = $\frac{1}{6}$

для B: N = 6, M = 3 => P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ /

<u>*Задача.*</u> Бросаются 2 монеты. Какова вероятность, что обе монеты упадут «гербом» кверху?

/ <u>*ГГ*</u>*, ГР, РГ, РР* $(\frac{1}{4})$ /

<u>*Задача.*</u> Бросаются 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?

/ N = 6·6 = 36, M = 6

1-ый	1	2	3	4	5	6
2-ой	6	5	4	3	2	1

P(A) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ /

<u>*Задача.*</u> Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара чёрные?

/ $N = C_{20}^2 = 190$, $M = C_8^2 = 28$ => $P(A) = \frac{14}{95}$ /

2.2. Геометрическое определение вероятности

Классическая и статистическая вероятность предполагают конечное число исходов испытаний. Однако часто встречаются такие испытания, для которых число возможных исходов бесконечно. В подобных случаях формула P(A) = $\frac{M}{N}$ неприменима и используется иной подход.

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезке L наудачу поставлена точка. Очевидно, что вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством:

$$\boxed{p = \frac{|l|}{|L|}}$$

Если плоская фигура f составляет часть плоской фигуры F, и на фигуру F наудачу брошена точка, то вероятность попадания точки в фигуру f определяется равенством: $P = \frac{S_f}{S_F}$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственное тело:

$$\boxed{P = \frac{V_f}{V_F}}$$

Исходя из этого, дадим определение геометрической вероятности.

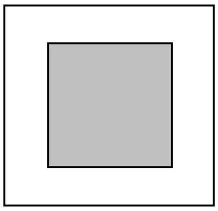
<u>Опр.</u> ***Геометрической вероятностью события*** называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области.

<u>*Задача.*</u> Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

/ *а)* $\frac{2}{\pi}$*;* *б)* $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ / *(Для квадрата - R =* $\frac{a}{\sqrt{2}}$*, для треугольника - R =* $\frac{a}{\sqrt{3}}$*)* /

<u>*Задача.*</u> На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. Найти вероятность, что брошенный на плоскость круг радиуса 1см не пересечёт ни одной стороны квадрата.

/



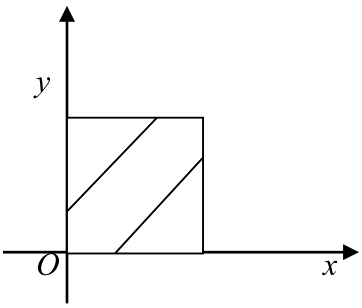
$$p = \frac{6^2}{8^2} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$ /

<u>*Задача.*</u> Два лица договорились встретиться между шестью и семью часами вечера, причём каждый ждёт другого 20 минут, потом уходит. Какова вероятность встречи?

/ *Пусть x – время прихода первого лица, y – время прихода второго лица.*

Встреча состоится, если $|x - y| \le 20$*, т.е.*

$$-20 \le x - y \le 20 \qquad \begin{cases} y \le x + 20 \\ y \ge x - 20 \end{cases}$$



$$p = \frac{60 \cdot 60 - 40 \cdot 40}{60 \cdot 60} = \frac{5}{9}$$ /

3. Основные теоремы теории вероятности

3.1. Теорема сложения для несовместных событий

<u>Т1.</u> Вероятность появления одного из двух несовместных событий, неважно какого, равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Доказательство:

Предположим, что испытание допускает N исходов (все одинаково возможны), из них к событию A приводят M_1 исходов, а к событию B – M_2 исходов. Т.к. события A и B несовместны, то к событию A + B будут приводить $M_1 + M_2$ исходов. Следовательно,

$P(A + B) = \frac{M_1+M_2}{N} = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} = P(A) + P(B)$, ч.т.д.

Сл.1. *Теорема справедлива для любого конечного числа попарно несовместных событий.*

Сл.2. *Если события A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу попарно несовместных событий, то* $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Сл.3. *Если A и $\overline{A}$ - противоположные события, то* $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

<u>Задача.</u> В ящике 12 белых, 7 чёрных и 11 красных шаров. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар – не белый?

/ *Пусть A – «вынут чёрный шар»,*

B – «вынут красный шар»,

тогда A + B – «вынут чёрный или красный шар».

$P(A) = \frac{7}{30}$, $P(B) = \frac{11}{30} \Rightarrow P(A+B) = \frac{7}{30} + \frac{11}{30} = \frac{18}{30} = 0{,}6$ /

<u>Задача.</u> От коллектива бригады, которая состоит из 6 мужчин и 4 женщин, на профсоюзную конференцию выбираются 2 человека. Какова вероятность, что среди выбранных хотя бы одна женщина?

/ *<u>1 способ:</u> Пусть A – «одна женщина»:* $P(A) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \cdots = \frac{8}{15}$

B – «две женщины»: $P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \cdots = \frac{2}{15}$,

тогда $P(A+B) = \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

<u>2 способ:</u> Пусть A – «два мужчины» : $P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$,

тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$ /

<u>*Задача.*</u> Бросают 3 игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 17?

/ *Пусть А – «* < 17*», тогда* $\overline{A}$ *– «* ≥ 17*».*

$N = \tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$

Т.к. для 17 очков – 3 возможности, а для 18 очков – 1 возможность, то

$P(\overline{A}) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$. *А значит,* $P(A) = 1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54}$ /

3.2. Теорема умножения для независимых событий

<u>**Опр.**</u> Событие А называется ***независимым от В***, если Р(А) не зависит от того, произошло событие В или нет.

(!!) *Если событии А и В независимы, то независимы события А и* $\overline{\mathrm{B}}$.

(!!) *Если два события независимы, то независимы и противоположные им события.*

<u>**Т2.**</u> Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

(!!) *Теорема справедлива для любого конечного числа независимых событий.*

<u>*Задача.*</u> Какова вероятность того, что при 2-х, 3-х, …., *n* бросаниях монеты каждый раз будет выпадать герб?

/ *Т.к.* $P(A_i) = \frac{1}{2}$, *то* $P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(A_1 \cdot A_1 \cdot A_3) = \ldots = \frac{1}{8}$

$P(\prod_{i=1}^{n} A_I) = \frac{1}{2^n}$ /

<u>*Задача.*</u> <u>Задача о стрелках.</u> Два стрелка одновременно производят выстрел по мишени. Первый из них поражает цель в 80%, а второй – в 70% выстрелов. Какова вероятность поражения цели?

/ $P(A) = 0{,}8$ $\quad P(\overline{A}) = 0{,}2$

P(B) = 0,7 $P(\overline{B}) = 0{,}3$

$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$ => $P(A+B) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$ /

<u>*Задача.*</u> В цехе 2 станка. Вероятность занятости каждого из них равна 0,7. Какова вероятность того, что один станок занят, а второй нет?

/ *Пусть A – «занят только один станок»*

A_1 – «занят 1-й станок»

A_2 – «занят 2-й станок»,

тогда $A = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$. *А следовательно,* $P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$ /

3.3. Теорема сложения для совместных событий

<u>**Т3.**</u> Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}$$

Доказательство:

M_1 M_2 $A + B$ - $M_1 + M_2 - K$

K

$$P(A+B) = \frac{M_1 + M_2 - K}{N} = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} - \frac{K}{N} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B), \text{ ч.т.д.}$$

Обобщение: *Аналогично можно доказать справедливость формулы для 3-х совместных событий:*

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) - P(A \cdot B \cdot C).$$

(!!) *Теорема сложения для несовместных событий – частный случай данной теоремы.*

Действительно, если A и B – несовместные события, то $P(A \cdot B) = 0$

<u>*Задача.*</u> Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 2-м или 3-м.

/ $P(A \cdot B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ /

<u>*Задача.*</u> <u>Задача о 2-х стрелках</u>

/ *Пусть* $P(A) = 0{,}7$ *и* $P(B) = 0{,}8$, *тогда* $P(A \cdot B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

А значит, P(A+B) = 0,7 + 0,8 – 0,56 = 0,94 /

3.4. Теорема умножения для зависимых событий

Опр. ***Условной вероятностью события A при условии B*** называется вероятность, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло.

Обозначение: $P_B(A)$, $P(A|B)$

Т4. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило, т.е.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

Доказательство:

M_1 M_2

K

N

$P(A) = \frac{M_1}{N}$ $P(B) = \frac{M_2}{N}$

$P(A \cdot B) = \frac{K}{N}$

$P_B(A) = \frac{K}{M_2}$, $P_A(B) = \frac{K}{M_1}$

$P(A) \cdot P_A(B) = \frac{M_1}{N} \cdot \frac{K}{M_1} = \frac{K}{N}$

$P(B) \cdot P_B(A) = \frac{M_2}{N} \cdot \frac{K}{M_2} = \frac{K}{N}$

Обобщение: Для 3-х событий: $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cdot B}(C)$

(!!) *Теорема умножения для независимых событий является частным случаем данной теоремы, т.к. если A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$.*

Задача. Какова вероятность извлечь из данной партии деталей деталь первого сорта, если 4% всей продукции – брак, а 75% не бракованных изделий – изделия 1 сорта.

/ *A – «деталь - не бракованная»* $P(A) = 0,96$

B – «деталь – 1 сорта» $P_A(B) = 0,75$

$P(A \cdot B) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72$ /

Задача. В ящике находятся 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берёт 2 детали. Вычислить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

/ *A – «1-я деталь стандартная»* $P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

B – «2-я деталь стандартная» $P_A(B) = \frac{7}{11}$

$P(A \cdot B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$ /

Задача. Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет чётное и меньшее 5 число очков?

/ $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ /

Задача. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает ответы на 3 вопроса билета.

/ $\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}$ /

3.5. Формула полной вероятности

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из совместных событий, образующих полную группу. Нахождение вероятности подобного события даёт следующая теорема, которая является следствием теорем сложения и умножения вероятностей.

Т. Вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события А, т.е.

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)}$$

Доказательство:

Т.к. событие А может наступить только вместе с одним из событий H_i, то событие А можно записать так: $A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A$. Следовательно, по T_1 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cdot A)$. Далее, по T_4 можно записать: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)$, ч.т.д.

Доказанная формула называется ***формулой полной вероятности***, а события H_i – ***гипотезами***.

Задача. Пусть имеются три одинаковые урны с таким составом шаров:

1) 2 белых и 1 чёрный;

2) белых и 2 чёрных;

3) 1 белый и 3 чёрных.

Какова вероятность того, что извлечённый из произвольно взятой урны шар - белый?

/ *Пусть А – «извлечён белый шар»,*

H_i – «извлечён шар из i-ой урны», тогда

$P(H_i) = \frac{1}{3}$, $P_{H_1}(A) = \frac{2}{3}$, $P_{H_2}(A) = \frac{3}{5}$ *и* $P_{H_3}(A) = \frac{1}{4}$. *А значит,*

$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \ldots = \frac{91}{180}$ /

Задача. Имеются 4 партии ламп по 10, 20, 30 и 40 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равны для каждой партии соответственно 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из 100 данных ламп проработает заданное время?

/ $P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}8$ /

Задача. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса каждый, причём вопросы не повторяются. Студент знает 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на 1 вопрос билета и на один дополнительный вопрос.

/ Пусть А – «студент сдал экзамен», H_1 – «знал 2 вопроса», H_2 – «1-ый вопрос знал, 2-ой - не знал», H_3 - «1-ый вопрос не знал, 2-ой - знал»

$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$

$P(H_1) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29}$, $P_{H_1}(A) = 1$

$P(H_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29}$, $P_{H_2}(A) = \frac{24}{28}$

$P(H_1) = \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29}$, $P_{H_3}(A) = \frac{24}{28}$ $P(A) = \frac{190}{203}$ /

3.6. Теорема гипотез (формула Байеса)

При выводе формулы полной вероятности предполагается, что событие А, вероятность которого следует определить, может произойти с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, при этом вероятности указанных событий (гипотез) известны заранее. Предположим, что произведён опыт и событие А наступило. Установим, как изменяются после этого вероятности гипотез, т.е. найдём условные вероятности $P_A(Hi)$ для каждой гипотезы.

Т.к. $P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{Hi}(A)$, то $P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$.

Подставляя вместо P(A) формулу полной вероятности, получим ***формулу Байеса***:

$$\boxed{P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)}}$$

Т (гипотез) Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса.

Задача. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится как 3 к 2. Вероятность того, что будет заправляться легковая машина, равна 0,2. Для грузовой машины эта вероятность равна 0,1. К бензоколонке для заправки подъехала машина. Найти вероятность того, что она грузовая.

/ *Пусть А – «машина заправилась»,*

H_1 – «подъехала грузовая машина»,

H_2 – «подъехала легковая машина»,

Тогда $P(H_1) = \frac{3}{5}$, $P(H_2) = \frac{2}{5}$, $P_{H_1}(A) = 0{,}1$ *и* $P_{H_2}(A) = 0{,}2$.

А значит, $P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)} = \ldots = \frac{3}{7}$ /

<u>*Задача.*</u> Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый производит, в среднем, 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом?

/ *Пусть A – «деталь отличного качества»,*

H_1 *– «деталь произведена 1-ым автоматом»*

H_2 *– «деталь произведена 2-ым автоматом»*

$P(H_1) = \frac{2}{3}$, $P(\mathrm{H}_2) = \frac{1}{3}$, $P_{H_1}(A) = 0{,}6$ *и* $P_{H_2}(A) = 0{,}84$ =>

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)} = \ldots = \frac{10}{17} \quad /$$

<u>*Задача.*</u> Две из 4-х независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали 1-я и 2-я лампы, если вероятности отказа для каждой лампы соответственно равны 0,1, 0,2, 0,3 и 0,4.

/ *A – «две из 4-х ламп отказали»*

H_1 *– «отказали 1 и 2 лампы»,* H_2 *– «отказали 1 и 3 лампы»,* H_3 *– «отказали 1 и 4 лампы»,*

H_4 *– «отказали 2 и 3 лампы»,* H_5 *– «отказали 2 и 4 лампы»,* H_6 *– «отказали 3 и 4 лампы».*

$P(H_1) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6 = 0{,}0084\ldots$

$\mathrm{P}_{\mathrm{H}_i}(\mathrm{A}) = 1 \quad \forall i \qquad P_A(H_1) \approx 0{,}04$ /

4. Независимые повторные испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли

4.1. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание (опыт) повторяется многократно.

<u>Опр.</u> Испытания называются ***независимыми относительно события*** A, если вероятность появления события А в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность того, что произойдёт событие А, равна p, а следовательно, вероятность того, что оно не произойдёт, равна $q=1-p$. Требуется найти вероятность того, что при n последовательных испытаниях событие А произойдёт ровно m раз. Искомую вероятность обозначим $p_n(m)$.

Пусть A_i – появление события А в i-ом опыте,

$\overline{A_i}$ - не появление события А в i-ом опыте.

1) Для одного испытания возможны следующие 2 исхода: А и $\overline{A}$.

Вероятности этих исходов выпишем в виде таблицы:

Событие	A	$\overline{A}$
Вероятность	p	q

Очевидно, $p_1(1) = p$, $p_1(0) = q$

$p_1(1) + p_1(0) = p + q = 1$.

2) Для 2-х испытаний возможны $2^2 = 4$ исхода: $A_1 \cdot A_2$, $A_1 \cdot \overline{A_2}$, $\overline{A_1} \cdot A_2$, $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.

Событие	$A_1 \cdot A_2$	$A_1 \cdot \overline{A_2}$	$\overline{A_1} \cdot A_2$	$\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$
Вероятность	P^2	$p \cdot q$	$q \cdot p$	q^2

Очевидно, $p_2(2) = p^2$

$p_2(1) = 2p \cdot q$

$p_2(0) = q^2$

$p_2(2) + p_2(1) + p_2(0) = (p + q)^2 = 1$

3) Для 3-х испытаний – 8 исходов

Событие	$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$	$\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$	$A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$	$A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$	$\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$	$\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$	$A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$	$\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$
Вероят-ность	p^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2	pq^2	pq^2	q^3

Очевидно, $p_3(3) = p^3$

$p_3(2) = 3p^2 \cdot q$

$p_3(1) = 3pq^2$

$p_3(0) = q^3$

$p_3(3) + p_3(2) + p_3(1) + p_3(0) = (p + q)^3 = 1$

Анализируя эти случаи, можно сделать общий вывод: вероятность $p_n\,(m)$ пропорциональна произведению $p^m \cdot q^{n-m}$, причём коэффициент пропорцио-нальности равен C_n^m.

Т.о.,

$$\boxed{p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$ - формула Бернулли

<u>Задача.</u> Монету бросают 8 раз. Какова вероятность, что 4 раза выпадет «герб»?

/ $n = 8, \quad m = 4, \quad p = q = \frac{1}{2}$

$p_8(4) = C_8^4 p^4 \cdot q^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \ldots = \frac{35}{128} < \frac{1}{3}$ /

<u>Задача.</u> В урне 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Вынули подряд 5 шаров, причём каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет 2 белых.

/ $n = 5, \quad m = 2, \quad p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}, \ q = \frac{1}{4}$

$p_5(2) = C_5^2 p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \ldots = \frac{45}{512}$ /

(!!) *Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее m раз; б) более m раз; в) не более m раз; г) не менее m раз, - находится соответственно по формулам:* $p_n(0) + \ldots + p_n(m-1)$;

$p_n(m+1) + \ldots + p_n(n)$;

$$p_n(0) + \ldots + p_n(m);$$

$$p_n(m) + \ldots + p_n(n).$$

Задача. Вероятность изготовления на станке-автомате нестандартной детали равна 0,02. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей окажутся более 4-х стандартных.

/ $n = 6, \quad p = 0{,}02, \quad q = 0{,}98$

$p_6(0 \leq m \leq 1) = p_6(0) + p_6(1) = C_6^0\, p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 \approx 0{,}9943$ /

4.2. Наивероятнейшее число наступления события в схеме Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний. При каждом таком испытании событие А может произойти или не произойти. Известна вероятность появления события А. Какое число появления события А из чисел 0, 1, …, n наиболее вероятно, т.е. надо найти такое число m, для которого вероятность $P_n(m)$ будет наибольшей?

Задача. Монета бросается 10 раз в неизменных условиях. Испытания независимы. Выясним, какая из вероятностей $p_n(m)$ выпадения герба наибольшая.

Составим таблицу.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_{10}^m	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
$P_{10}(m)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Наибольшая вероятность $p_{10}(5) = \frac{252}{1024}$.

Очевидно, если n – нечётное число, то будет 2 равные наибольшие вероятности.

Практически вычислять каждый раз $p_n(m)$ и выбирать из них наибольшее – дело громоздкое. Поэтому существует косвенный метод вычисления наиболее вероятного числа наступления событий.

Пусть из всех значений m $\boldsymbol{\mu}$ - наиболее вероятное число наступления события А, т.е. $p_n(\mu-1) \leq p_n(\mu) \geq p_n(\mu+1)$.

Рассмотрим 1-ое неравенство:

$$C_n^{\mu-1} p^{\mu-1} q^{n-\mu+1} \leq C_n^{\mu} p^{\mu} q^{n-\mu}$$

$$\frac{n!}{(\mu-1)!(n-\mu+1)!} p^{\mu-1} q^{n-\mu+1} \leq \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^{\mu} q^{n-\mu}$$

$$\frac{1}{n-\mu+1} \cdot q \leq \frac{1}{\mu} \cdot p$$

$$q\,\mu \leq p\,(n-\mu+1)$$

$$(p+q)\,\mu \leq p\,n + p \qquad \Rightarrow \qquad \mu \leq p\,n + p$$

Проведя аналогичные выкладки для 2-го неравенства, получим

$$\mu \geq p\,n - q$$

Таким образом, число μ должно удовлетворять двойному неравенству:

$$\boxed{np - q \leq \mu \leq np + p}$$

Очевидно, что отрезок $[np-q; np+p]$, в котором лежит μ, имеет длину 1. Поэтому, если его концы не является целыми числами, то между ними лежит единственное целое число, и μ определено однозначно. В случае, если оба конца – целые числа, имеются 2 наивероятнейших значения : $np - q$ и $np + p$.

Задача. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случае отбора партии из 75 изделий?

/ $p = 0{,}31$, $q = 0{,}69$, $n = 75$

$0{,}31 \cdot 75 - 0{,}69 \leq \mu \leq 0{,}31 \cdot 75 + 0{,}31$

$22{,}56 \leq \mu \leq 23{,}56 \qquad \mu = 23$ */*

Задача. Было посажено 28 семян ячменя с одной и той же вероятностью всхожести $\frac{18}{29}$ для каждого. Найти наиболее вероятное число проросших семян.

/ 17 и 18 /

Задача. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для 1-го стрелка равна 0,2, а 2-го – 0,4.Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

/ $n = 25,\ \ p = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08,\ \ q = 0{,}92$

$0{,}08 \cdot 25 - 0{,}92 \le \mu \le 0{,}08 \cdot 25 + 0{,}08$

$1{,}08 \le \mu \le 2{,}08 \;\Rightarrow\; \mu = 2$ /

5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона

5.1. Теоремы Лапласа

Подсчёт вероятности $p_n(m)$ по формуле Бернулли при больших значениях n связан с громоздкими вычислениями. Это побудило найти более простые по виду, хотя и приближённые формулы. Впервые такую формулу получил Муавр для $p = 0{,}5$. Лаплас доказал эту формулу для более широкого класса p.

T₁ (локальная) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна p $(0 < p < 1)$, тогда вероятность того, что событие А наступит ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x),\ \text{где}\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}},\ x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}}$$

Для функции $\varphi(x)$ составлены специальные таблицы её значений при положительных значениях x. Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, т.к. функция $\varphi(x)$- чётная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Задача. Два спортсмена играют в настольный теннис. Вероятность выигрыша первого спортсмена равна $\frac{5}{9}$. Какова вероятность того, что он выиграет две партии из пяти?

/ $n = 5, m = 2, p = \frac{5}{9}, q = \frac{4}{9}$

По формуле Бернулли: $p_5(2) = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3 \approx 0{,}271$

По локальной теореме Лапласа: $\sqrt{npq} = \frac{10}{9}$

$x = \frac{2-\frac{25}{9}}{\frac{10}{9}} = -0{,}7$ $\quad \varphi(-0{,}7) = \varphi(0{,}7) = 0{,}3123$ $\quad p_5(2) \approx 0{,}9\cdot 0{,}3123 = 0{,}281$ /

(!!) *Точность формулы повышается с увеличением n.*

<u>*Задача.*</u> Игральную кость бросают 80 раз. Определить вероятность того, что цифра 3 появится 20 раз.

/ $n = 80,\ \ m = 20,\ \ p = \frac{1}{6},\ q = \frac{5}{6}$

$\sqrt{npq} = \sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3},$ $\qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{20-80\cdot\frac{1}{6}}{\frac{10}{3}} = 2$

По таблице находим $\varphi(2) = 0{,}054$. *Следовательно,* $p_{80}(20) \approx \frac{1}{\frac{10}{3}}\cdot 0{,}054 = \frac{3\cdot 0{,}054}{10} = 0{,}0162$/

<u>*Задача.*</u> Медиками установлено, что 94% лиц, которым сделаны прививки против туберкулёза, отличаются иммунитетом. Какова вероятность того, что из 100 тыс. граждан, получивших прививки, 5800 не защищены от заболеваний?

/ $n = 100000,\ \ m = 5800,\ \ p = 0{,}06,\ q = 0{,}94$

$\sqrt{npq} \approx 75,$ $\qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \approx -2{,}7$

$\varphi(-2{,}7) = \varphi(2{,}7) = 0{,}0104$. *Следовательно,* $p_{100000}(5800) \approx 0{,}00014$ /

<u>**T_2 (интегральная)**</u> Вероятность того, что в *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна *p,* событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 *раз*, вычисляется по формуле:

$$p_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Таблица функции Ф(х) для положительных значений $x \le 5$ приводится в приложениях. Для $x > 5$ полагают Ф(х) = 0,5. Для отрицательных значений х используют эту же таблицу, учитывая, что эта функция нечётная, т.е. Ф(-х) = - Ф(х).

Задача. Какова вероятность того, что при 200 бросаниях монеты число появлений герба удовлетворяет неравенству $95 \le m \le 105$.

/ $n = 200$, $m_1 = 95$, $m_2 = 105$, $p = q = 0,5$

$x_1 = \frac{95-100}{\sqrt{50}} \approx -0,7070$, $\qquad$ $x_2 = \frac{105-100}{\sqrt{50}} \approx 0,7070$

$p_{200}(95 \le m \le 105) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 2\,\Phi(x_2)$.

По таблице находим $\Phi(0,71) = 0,2611$. *Следовательно,* $p_{200}(95 \le m \le 105) \approx 0,5222$ /

5.2. Вероятность редких событий

Опр. Событие называется ***редким***, если его вероятность в отдельном испытании близка к нулю.

Для таких событий формула Лапласа даёт результаты, недостаточно близкие к их истинным значениям. В таких случаях применяют другую формулу – формулу Пуассона.

Т3 Если вероятность *p* наступления события А в каждом испытании близка к нулю, то вероятность того, что в *n* независимых испытаниях событие А наступит *m* раз, приближённо вычисляется по формуле:

$$\boxed{p_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np}$$

Задача. Среди 1000 человек примерно 8 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

/ $n = 100$, $m = 0$, $p = 0,008$, $q = 0,992$

$\lambda = 0,8 \qquad P_{100}(0) \approx \frac{0,8^0 \cdot e^{-0,8}}{0!} = e^{-0,8} \approx 0,4493$ /

Задача. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определённая микросхема. Вероятность её отказа в течение 1 часа работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000 часов работы устройства придётся 5 раз менять микросхему?

/ $n = 1000$, $m = 5$, $p = 0,004$, $q = 0,996$

$\lambda = 4 \qquad P_{100}(0) \approx \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx 0,1563$ /

Задания для самостоятельного решения

1. Среди 50-и деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что наудачу вынутая деталь окажется стандартной? (нестандартной?)

2. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 чёрных и 5 красных шаров, наудачу вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) чёрным; в) жёлтым; г) красным?

3. Цифры 0,1,…,9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны? Произвольным образом вынимают подряд 3 карточки и кладут в ряд. Какова вероятность того, что число, состоящее из 3-х цифр, которые написаны на карточках, больше 987?

4. Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков Наудачу извлекают 1 кубик. Определить вероятность того, что этот кубик: а) с одной окрашенной гранью; б) с 2-мя окрашенными гранями; в) с 3-мя окрашенными гранями?

5. Бросаются 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на 2-х костях, равна 8? (меньше13?)

6. В урне 100 шаров, помеченных номерами 1, 2, …, 100. Из урны наудачу вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

7. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наудачу выбранных билетов два будут выигрышными?

8. 9 книг расставляются на полке. Какова вероятность того, что указанные 3 книги будут стоять рядом?

9. Из букв составлено слово «книга». Это слово рассыпали и произвольно собрали заново. Какова вероятность того, что снова получится слово «книга»?

10. В группе 30 учащихся. Из них 12 юношей. Известно, что к доске должны быть вызваны 2-е учащихся. Какова вероятность, что это девушки?

11. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см. Наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечёт ни одной из прямых.

12. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых равны 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадёт также в кольцо, образованное окружностями?

13. Быстро вращающийся диск разделён на чётное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и чёрный цвет. По диску произведён выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадёт в один из белых секторов?

14. В пакете имеются 17 жетонов, пронумерованных числами 11 – 27. Какова вероятность того, чтобы извлечь жетон с номером, кратным 4 или 7?

15. Среди одинаковых по внешнему виду 11 изделий находятся 3 бракованных. Произвольно вынимают 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно бракованное.

16. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на 1-ом кубике выпадет чётное число очков, а на втором – число, меньшее 5?

17. Вероятность поломки первого станка в течение смены равна 0,2, а второго – 0,13. Чему равна вероятность того, что хотя бы один станок поломается?

18. Из 30-и учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – баскетболом и волейболом, а остальные другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или баскетболом?

19. Из 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

20. В некоторой местности число пасмурных дней в неделю равно 3. Какова вероятность того, что три дня подряд будет светить солнце?

21. Имеются 2 одинаковые урны: 1-ая содержит 2 чёрных и 3 белых шара, 2-ая – 2 чёрных и 1 белый шар. Сначала произвольно вынимают урну, а

затем наугад из неё извлекают 1 шар. Какова вероятность, что будет выбран белый шар?

22. В урне находятся 3 шара, цвет, которых может быть белым или чёрным. Какова вероятность, что вынутый шар – белый?

23. Две перфораторщицы набивают на одинаковых и исправных перфораторах перфокарты. Одна обрабатывает, в среднем, 60% карт из предложенной партии, вторая 40%. Вероятность того, что 1-ая допустит ошибку, равна 0,03, 2-ая – 0,05. Взятая на контроль перфокарта оказалась с ошибкой. Какова вероятность того, что ошиблась 2-ая перфораторщица?

24. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 – с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок при выстреле из винтовки с оптикой поразит мишень равна 0,95, а без оптики – 0.8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: он стрелял из винтовки с оптикой или без?

25. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

26. В ящике 80 стандартных и 20 нестандартных деталей. Какова вероятность, что из 5-и взятых наудачу деталей не менее 4-х окажутся стандартными?

27. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. По цели производят 15 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий.

28. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение 1 часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

Ответы

1. $\frac{45}{50}$ $(\frac{5}{50})$ **2.** а) $\frac{3}{12}$; б) $\frac{4}{12}$; в) 0; г) $\frac{5}{12}$ **3.** 0 **4.** а) $\frac{384}{1000}$; б) $\frac{96}{1000}$; в) $\frac{8}{1000}$ **5.** $\frac{5}{36}$ (1) **6.** $\frac{19}{100}$ **7.** $\frac{164}{1081}$ **8.** $\frac{1}{12}$ **9.** $\frac{1}{120}$ **10.** $\frac{51}{145}$ **11.** $\frac{2}{3}$ **12.** 0,75 **13.** 0,5 **14.** $\frac{6}{17}$ **15.** $\frac{109}{165}$ **16.** $\frac{1}{3}$ **17.** 0,304 **18.** $\frac{11}{15}$ **19.** $\frac{2}{87}$ **20.**

$\frac{4}{35}$ **21.** $\frac{7}{15}$ **22.** $0{,}5$ **23.** $\frac{10}{19}$ **24.** Без оптики (с оптикой - $\frac{19}{43}$, без оптики - $\frac{24}{43}$) **25.** $\approx 0{,}28$ **26.** $0{,}73728$ **27.** 12 **28.** $0{,}167$

Контрольные вопросы

1) Какое событие называется случайным?
2) Какое событие называется достоверным?
3) Какое событие называется невозможным?
4) Какие два события называется противоположными?
5) Сформулируйте классическое определение вероятности.
6) Какая существует связь между вероятностями противоположных событий?
7) Какие два события называется несовместными? (совместными)
8) Сформулируйте теорему о вероятности суммы двух несовместных событий.
9) Сформулируйте теорему о вероятности суммы двух совместных событий.
10) Дайте понятие события, зависимого от другого.
11) Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух независимых событий.
12) Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух зависимых событий.
13) Дайте понятие совместных и несовместных событий.
14) Сформулируйте теорему сложения для несовместных событий.
15) Сформулируйте теорему сложения для совместных событий.
16) Сформулируйте теорему умножения для независимых событий.
17) Сформулируйте теорему умножения для зависимых событий.
18) Дайте понятие условной вероятности.
19) Запишите формулу полной вероятности.
20) Для каких целей используется формула Байеса? Какой вид она имеет?
21) Запишите формулу Бернулли. Объясните смысл входящих в нее величин.
22) Как найти наивероятнейшее число наступления события?

23) Для вычисления каких вероятностей событий предназначены локальная и интегральная теоремы Лапласа?

24) В каком случае применяют формулу Пуассона?

Контрольные задания

1. В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

2. В партии из 13 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобрали 7 деталей. Найдите вероятность P того, что среди отобранных деталей ровно 5 стандартных.

3. Независимо друг от друга 5 человек садятся в поезд, содержащий 13 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.

4. Имеется 25 экзаменационных билетов, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В 15 билетах задачи по статистике, а в остальных 10 билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задачи по теории вероятностей.

5. В киоске продается 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 3 штуки. Студент купил 4 билета. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 2, но не больше 3?

6. Внутрь круга радиуса 50 наудачу брошена точка. Какова вероятность p того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата? правильного треугольника? Правильного шестиугольника?

7. В квадрат со стороной 15 случайным образом вбрасывается точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется в правой верхней четверти квадрата или не далее, чем в 2 от центра квадрата.

8. Пассажир подходит к остановке автобусов двух маршрутов. Интервал движения автобусов 1-го маршрута составляет 19 мин., а 2-го маршрута – 21 мин. Найдите вероятность P того, что пассажир уедет с остановки не позднее, чем через 6 мин., считая, что его устроит автобус как 1-го, так и 2-го маршрутов.

9. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.17, 0.73 и 0.14. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

10. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при 9 выстрелах равна 0.81. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

11. В ящике содержатся 6 деталей, изготовленных на заводе 1, 5 деталей – на заводе 2 и 6 деталей – на заводе 3. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1, 2 и 3 соответственно равны 0.04, 0.02 и 0.03. Найдите вероятность P того, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной.

12. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 23 белых шара, во втором – 9 белых и 14 черных шаров, в третьем – 23 черных шара. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность P того, что шар вынут из второго ящика.

13. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.18 . Сделано 7 выстрелов. Найдите вероятность того, что в цель попали менее трех раз.

14. Вероятность попадания стрелком в цель равна $\frac{1}{12}$. Сделано 132 выстрелов. Определите наивероятнейшее число попаданий в цель.